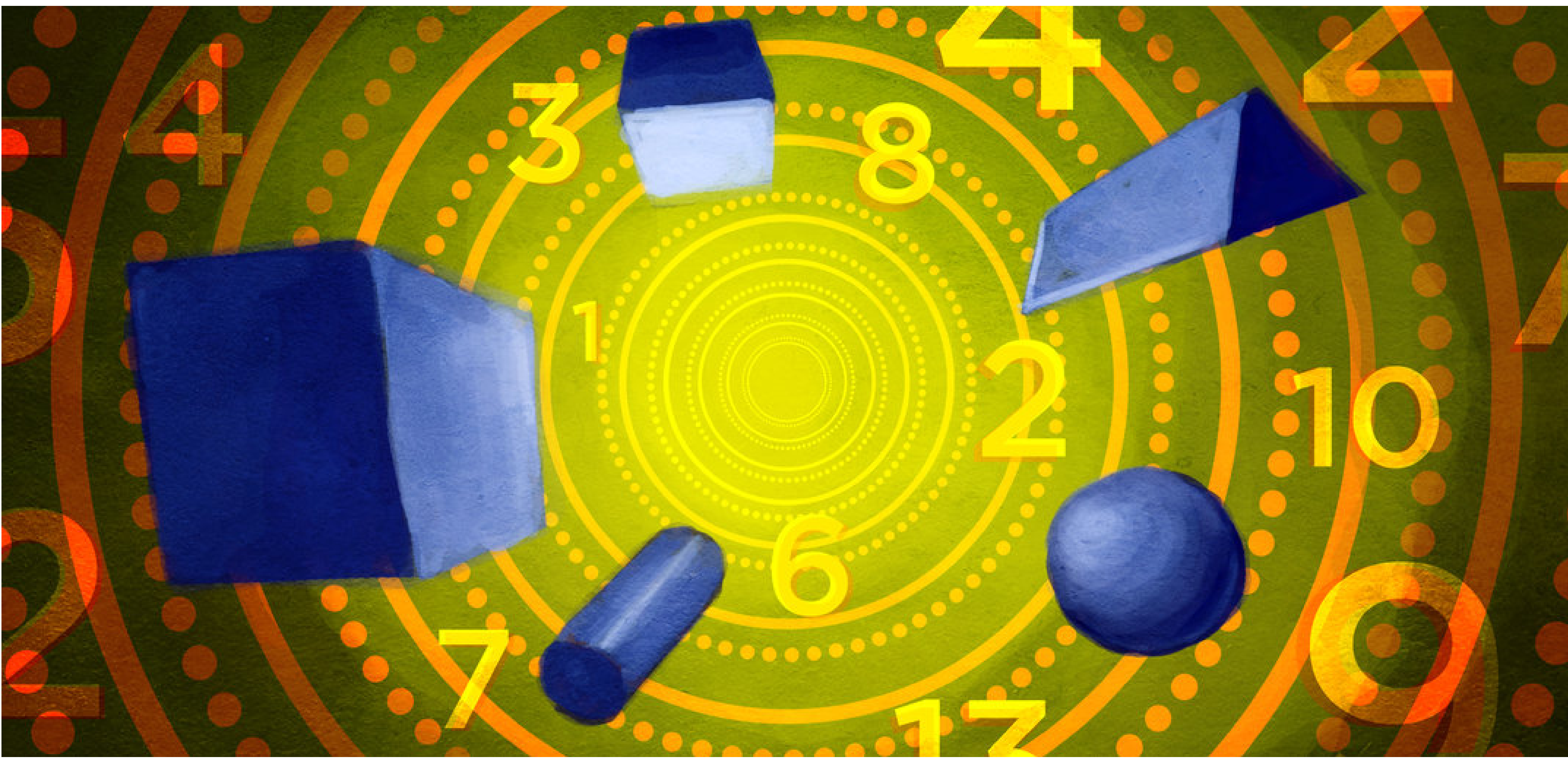


storyweaver

वाचन पातळी ४

सुंदर चमत्कार, फिबोनाची अंकांचा!

Author: Shonali Chinniah
Illustrator: Hari Kumar Nair
Translator: Bhagyashree Kenge



अंक! आपण अंक रोज वापरतो. मोजायला, मापं घ्यायला, मित्रांचे फोन नंबर फिरवायला आणि अगदी कोणत्याही गोष्टीची किंमत काय आहे हे समजून घ्यायलाही.

पण तुम्हाला माहिती आहे का की अंकांचा उपयोग विविध रचना करण्यासाठीही होतो. जसे भूमितीय रचनांसाठी होतो, रांगोळीच्या नक्षींसाठी आणि इतर रचनांमध्येही होतो. अंकांच्या ह्या रचना आपल्याला निसर्गाच्या ख - याखु - या रचनांमध्येही पाहायला मिळतात.

पण ही अंकांची रचना आहे तरी काय?

अंकांची रचना म्हणजे अंकांचा विशिष्ट क्रम. ह्या क्रमात प्रत्येक अंक आधीच्या अंकाशी एका विशिष्ट पध्दतीने जोडला गेलेला असतो.

आता ही सोपी रचनाच बघा ना: ०, १, २, ३, ४. ह्या रचनेत प्रत्येक अंक त्याच्या मागील अंकाशी कसा जोडलाय माहिती आहे कां? ह्या रचनेतला प्रत्येक अंक हा आधीच्या अंकांत १ मिळवून आलेला आहे.

आता ही आणखीन एक रचना पहा: १४, १२, १०, ८, ६... ह्या रचनेतला प्रत्येक अंक हा आधीच्या अंकांतून २ वजा करून आलेला आहे.



आता ही थोडीशी अवघड रचना पहा : ०, १, ३, ६, १०, १५... हा क्रम कसा तयार झाला? पाहू यात तर,

०+**१** = १

१+**२** = ३

३+**३** = ६

६+**४** = १०

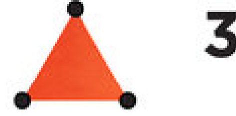
१०+**५** = १५

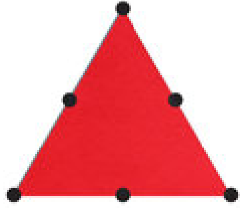
तुम्हाला ह्यात काही विशिष्ट क्रम दिसतो आहे का? आता ह्या क्रमातला पुढचा अंक कोणता असेल?

बरोबर! २१, कारण १५+**६** = २१

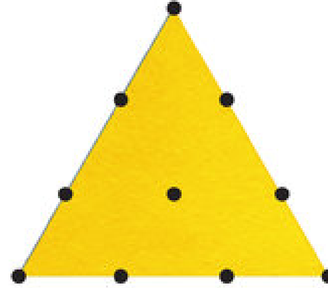


1

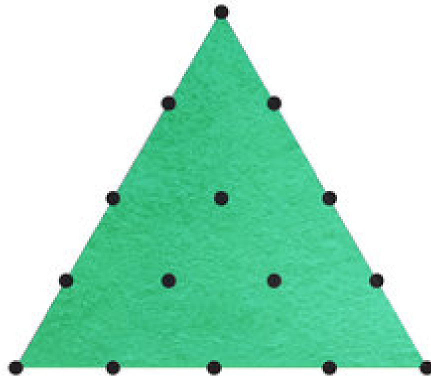




6



10



15

आताच बघितलेली अंक रचना घेऊ यात: १, ३, ६, १०, १५... आणि बघू यात की ह्यातून आपल्याला भूमितीय रचना तयार करता येतात का?

करता आली की! आपण त्रिकोणाची भूमितीय रचना करू शकलो. जर आपण ठिपके वाढवत नेले तर हे त्रिकोण मोठे मोठे होत जातील!

बघितलंत ना, अंकांची रचना ही भूमितीय रचना पण झाली!

तुम्हाला हे सर्व मजेशीर वाटतंय ना? मग आता तुम्हाला फिबोनाकी (किंवा हेमचंद्री) अंकांच्या रचनाक्रमाची ओळख करून द्यायला हवी.

फिबोनाकी क्रमाचे अंक असे आहेत:
०, १, १, २, ३, ५, ८, १३, २१, ३४...

ह्या अंकांना जोडणारी रचना तुम्हाला शोधता येते आहे का पहा बरं? बरोबर! फिबोनाकी क्रमानुसार तिस - या अंकापासून पुढं येणारा प्रत्येक अंक हा आधीच्या दोन अंकांची बेरीज आहे. पुढील प्रमाणे-



०+१ = **१**

१+१ = **२**

२+१ = **३**

३+२ = **५**

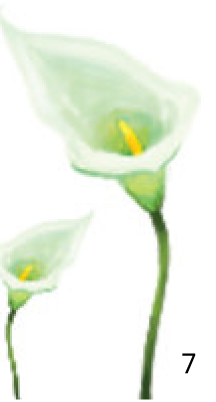
५+३ = **८**

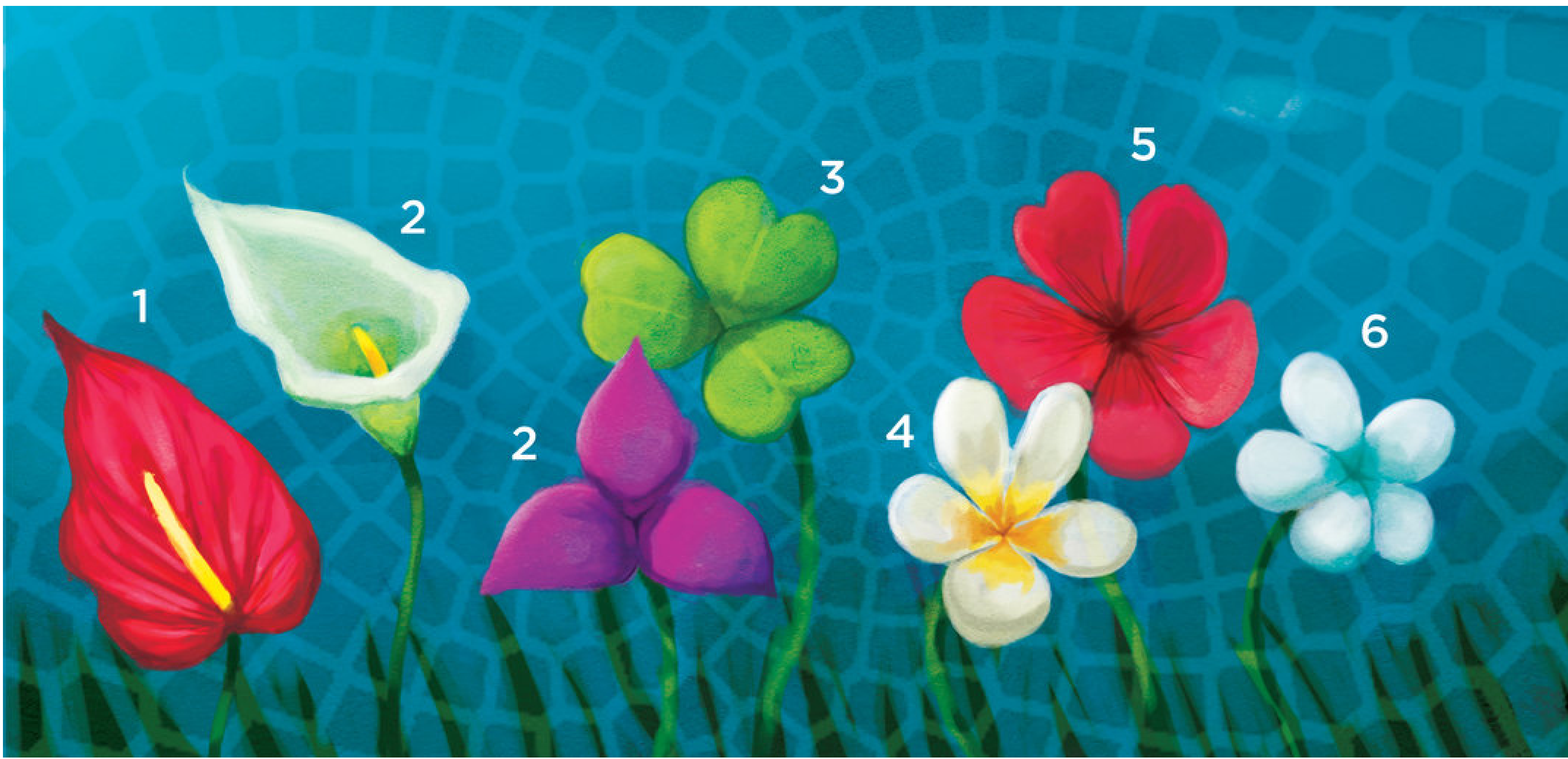
८+५ = **१३**

१३+८ = **२१**

२१+१३ = **३४**

समजलं ना? शाब्बास! आता खरी गंमतीची गोष्ट ही आहे की फिबोनाकी रचना निसर्गातल्या अनेक रचनांशी जवळीक साधणारी आहे! कशी? पाहू यात!





ब - याच फुलांच्या पाकळ्या ह्या फिबोनाकी रचनेसारख्या आहेत!

१,३ आणि ५ पाकळ्या (हे सर्व फिबोनाकी अंक आहेत) असणारी फुलं शोधा बरं? तुमच्या मदतीसाठी खालील उदाहरणे दिली आहेत.

१ पाकळी - एन्थुरियम, लिली

३ पाकळ्या - बोगनवेल, क्लोवर

५ पाकळ्या - चमेली, जास्वंद, देवचाफा, अलॅमॅन्डा



निसर्गात दोन पाकळ्या असलेली फुलंही आहेत. पण खूपच दुर्मिळ! परंतु ४ पाकळ्या असलेली फुलं (४ हा फिबोनाकी अंक नाही) सापडणं फारच अवघड आहे. तुम्हीही तुम्हाला दिसणा - या फुलांच्या पाकळ्या मोजून पहा (मात्र त्यांना तोडू नका हं)!



सर्वात गंमतशीर फिबोनाकी फुलं आहेत डेझी नावाची फुलं. या फुलाच्या जातींमध्ये १३, २१ किंवा ३४ पाकळ्या असतात - हे सगळेच फिबोनाकी अंक आहेत.

निसर्गात अजूनही फिबोनाकी अंकांवर आधारित काही क्लिष्ट आणि आश्चर्यकारक रचना आहेत. तुम्हाला थोडंसं गणित करून बघायची इच्छा असेल तर अशा गमती-जमती तुम्हाला सहज सापडतील. बघायचं का आपण असं करून?

समजा आपण फिबोनाकी रचनेतल्या प्रत्येक अंकाचा वर्ग* घेतला तर काय उत्तर मिळेल?

फिबोनाकी रचना: १, १, २, ३, ५, ८, १३ इत्यादी.

**जेव्हा आपण एखाद्या अंकाला त्याच अंकाने गुणतो, तेव्हा आपल्याला त्या अंकाचा वर्ग मिळतो*

आता आपण ह्या प्रत्येक अंकाचा वर्ग घेतला तर असे उत्तर असेल.

१ x १ = १ चा वर्ग किंवा $१^{२}$ = १

२ x २ = २ चा वर्ग किंवा $२^{२}$ = ४

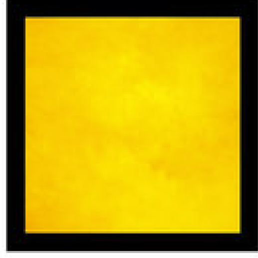
३ x ३ = ३ चा वर्ग किंवा $३^{२}$ = ९

५ x ५ = ५ चा वर्ग किंवा $५^{२}$ = २५

८ x ८ = ८ चा वर्ग किंवा $८^{२}$ = ६४

१३ x १३ = १३ चा वर्ग किंवा $१३^{२}$ = १६९

अशा प्रकारे आता फिबोनाकी क्रम (अंकाचे वर्ग) : १ - १ - ४ - ९ - २५ - ६४ - १६९ इत्यादी आहे.



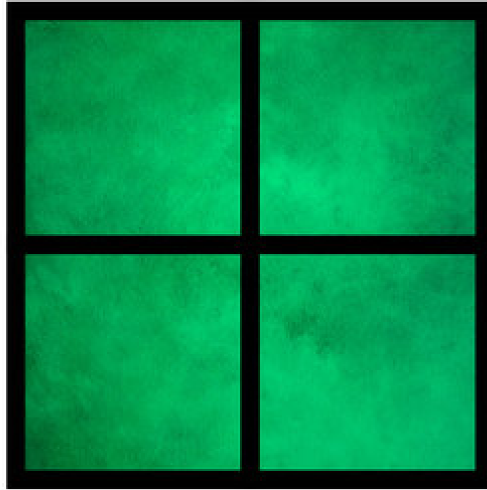
1^2

आधी जसा आपण अंकांचा क्रम त्रिकोणी भूमितीय रचनांमध्ये बदलतांना बघितला त्याचप्रमाणे फिबोनाकी क्रमाची (अंकांच्या वर्गाची) भूमितीय रचना कशी करता येईल पाहू यात. आपण १^{२}, २^{२}, ३^{२}काढून बघूयात...

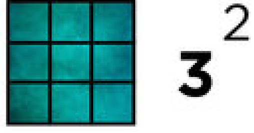
१^{२} तर खूप सोप्पं आहे - फक्त एक चौरस.

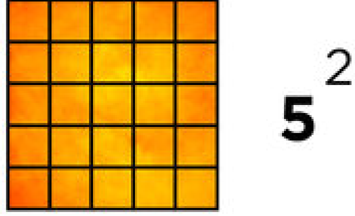
२^{२} हे असे काढावे लागेल - २ चौरस आडवे आणि २ चौरस उभे.

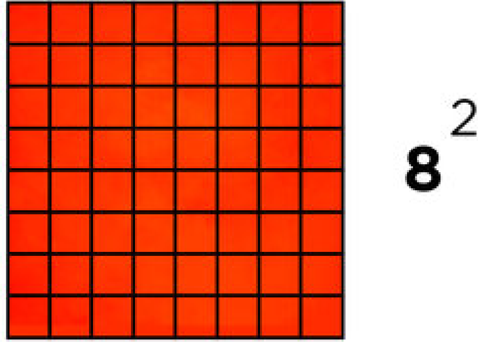
आपल्याला माहितीच आहे की २^{२} = ४ आणि ह्या आकृतीत ४ चौरस आहेत. (ह्या आकृतीला चौकट म्हणतात)

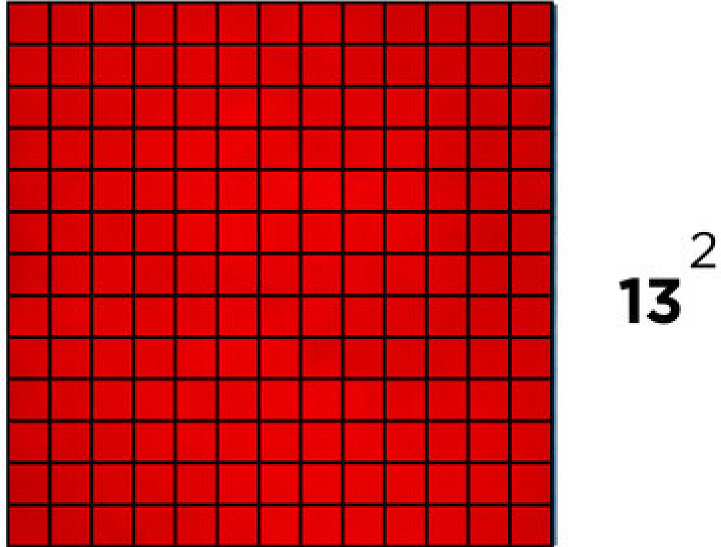


2^2





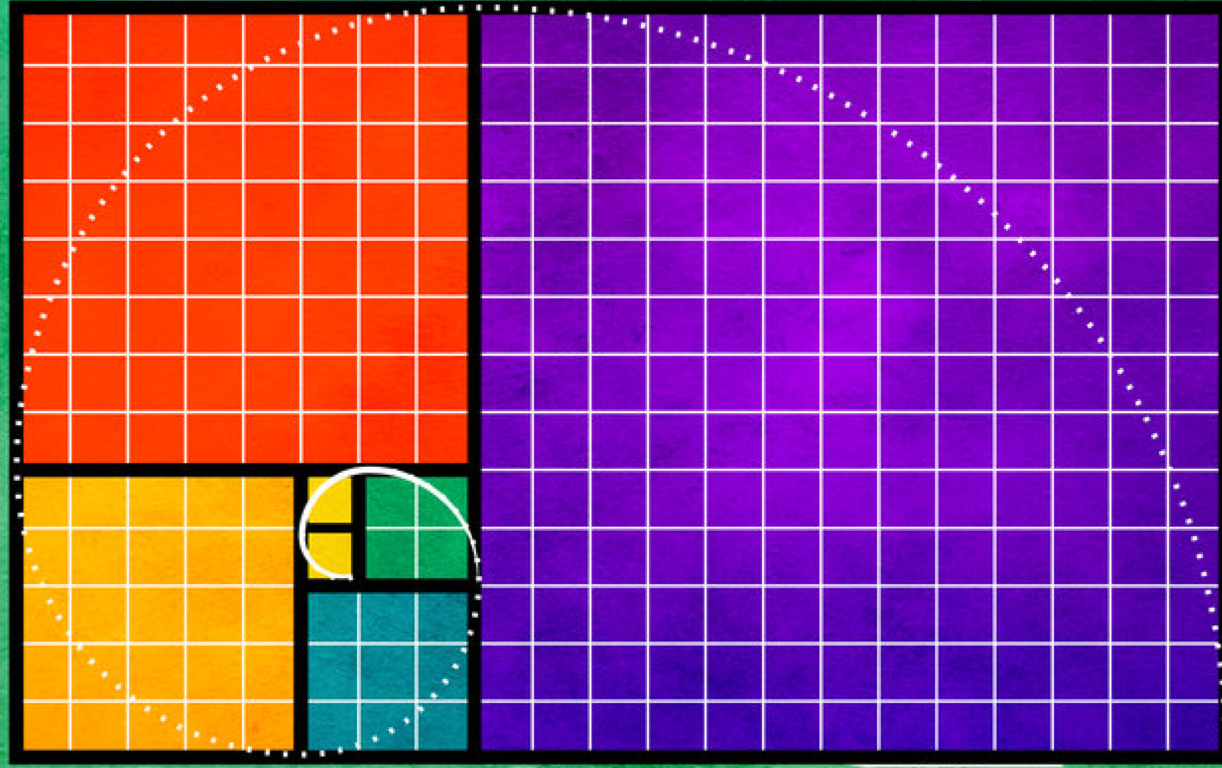




त्याचप्रमाणे ३^{२} काढायचे असेल तर ३ चौरस आडवे आणि ३ चौरस उभे काढावे लागतील. आपल्याला माहिती आहे की ३^{२} = ९ आणि ह्या चौकटीमध्येही ९ चौरस आहेत.

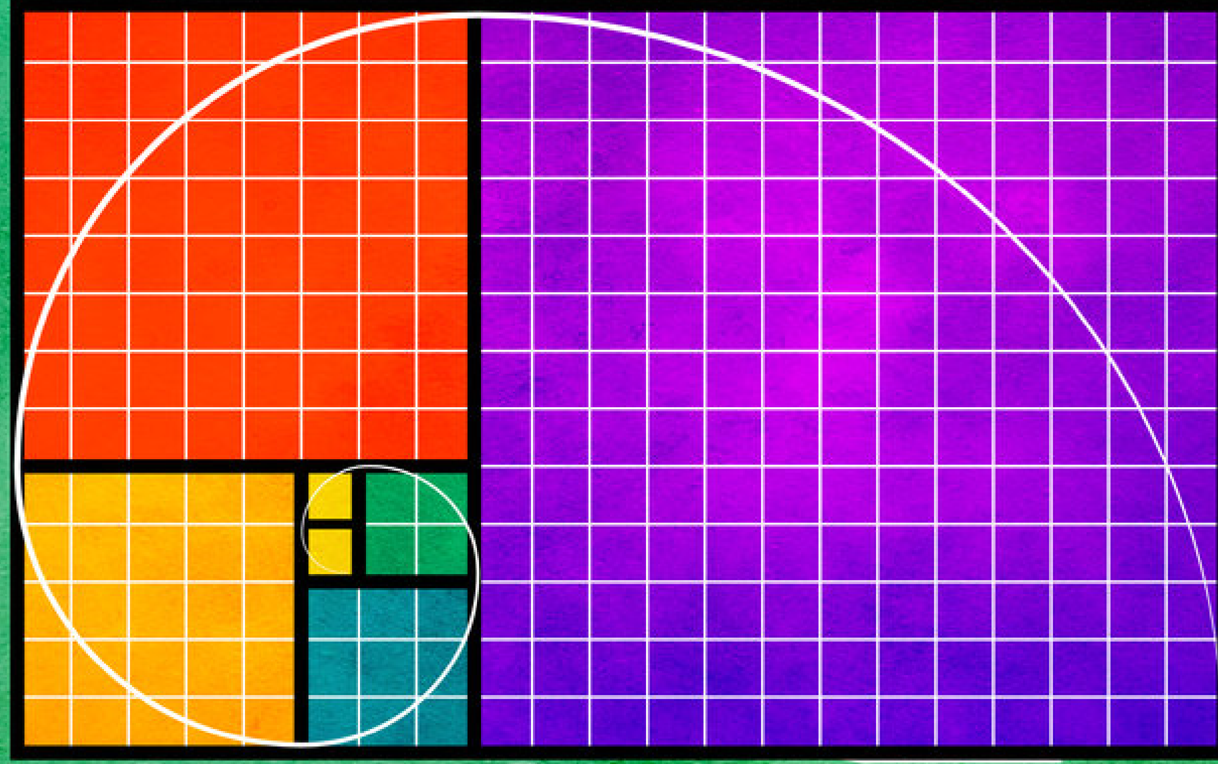
५^{२} काढायचे असल्यास ५ चौरस आडवे आणि ५ चौरस उभे मिळून २५ चौरसांची चौकट होते. ८^{२} म्हणजे ८
चौरस आडवे आणि ८ चौरस उभे मिळून ६४ चौरसांची चौकट होते.

त्याचप्रमाणे १३^{२} म्हणजे १३ चौरस आडवे आणि १३ चौरस उभे मिळून १६९ चौरसांची चौकट होते. ह्याचप्रमाणे पुढच्या अंकांचे वर्ग काढत जायचे. आता तुम्हाला ह्याप्रमाणे चौकटी काढता येतील ना? शाब्बास!



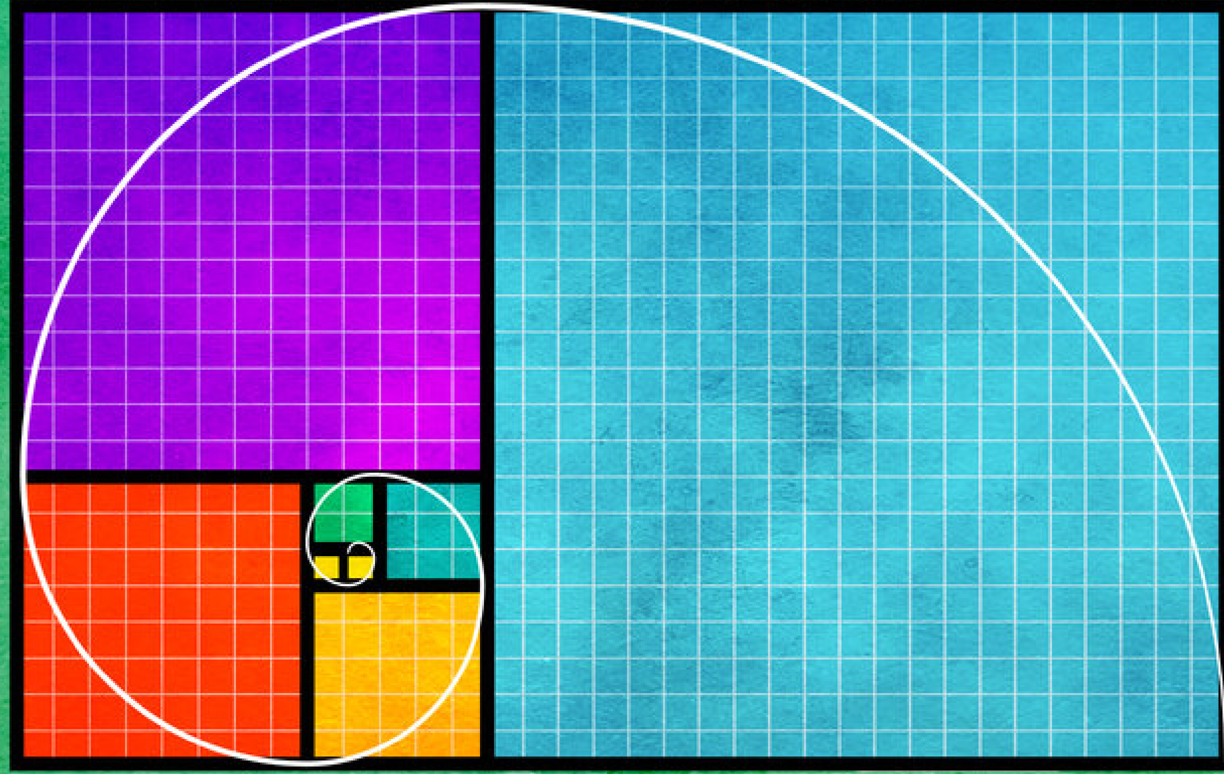
चला तर, आपण आत्तापर्यंत काढलेल्या चौकटी एकमेकींच्या जवळ आणू यात आणि चित्रात दाखवल्याप्रमाणे रचना करु यात. (चित्र / आकृती दाखवणे)

आता चित्रात दाखवल्याप्रमाणे एक वळणदार वक्र रेषा सगळ्यात छोट्या चौकटीच्या एका टोकापासून त्याच्या विरूद्ध टोकाला जोडा. (चित्र / आकृती दाखवणे)



आता तीच वक्र रेषा प्रत्येक चौकटीमधून आधीप्रमाणे जोडा. अगदी अखेरच्या १३व्या चौकटीपर्यंत. हे जोडल्यावर जी छानशी चक्राकार रचना तयार होते त्याला फिबोनाकी चक्र म्हणतात.

आता तुम्ही म्हणाल की ही फिबोनाकी अंकांच्या वर्गाने तयार झालेली चक्राकार रचना आणि निसर्ग ह्यामध्ये काय संबंध आहे? तर आमचं उत्तर आहे, आहे तर! फिबोनाकी चक्र निसर्गातही आपल्याला सापडते. कुठे? पाहू यात तर.



आता ही फिबोनाकी चक्र असलेली अजून एक $२१^{२}$ ची रचना आपल्या आधीच्या रचनेला जोडली आहे.

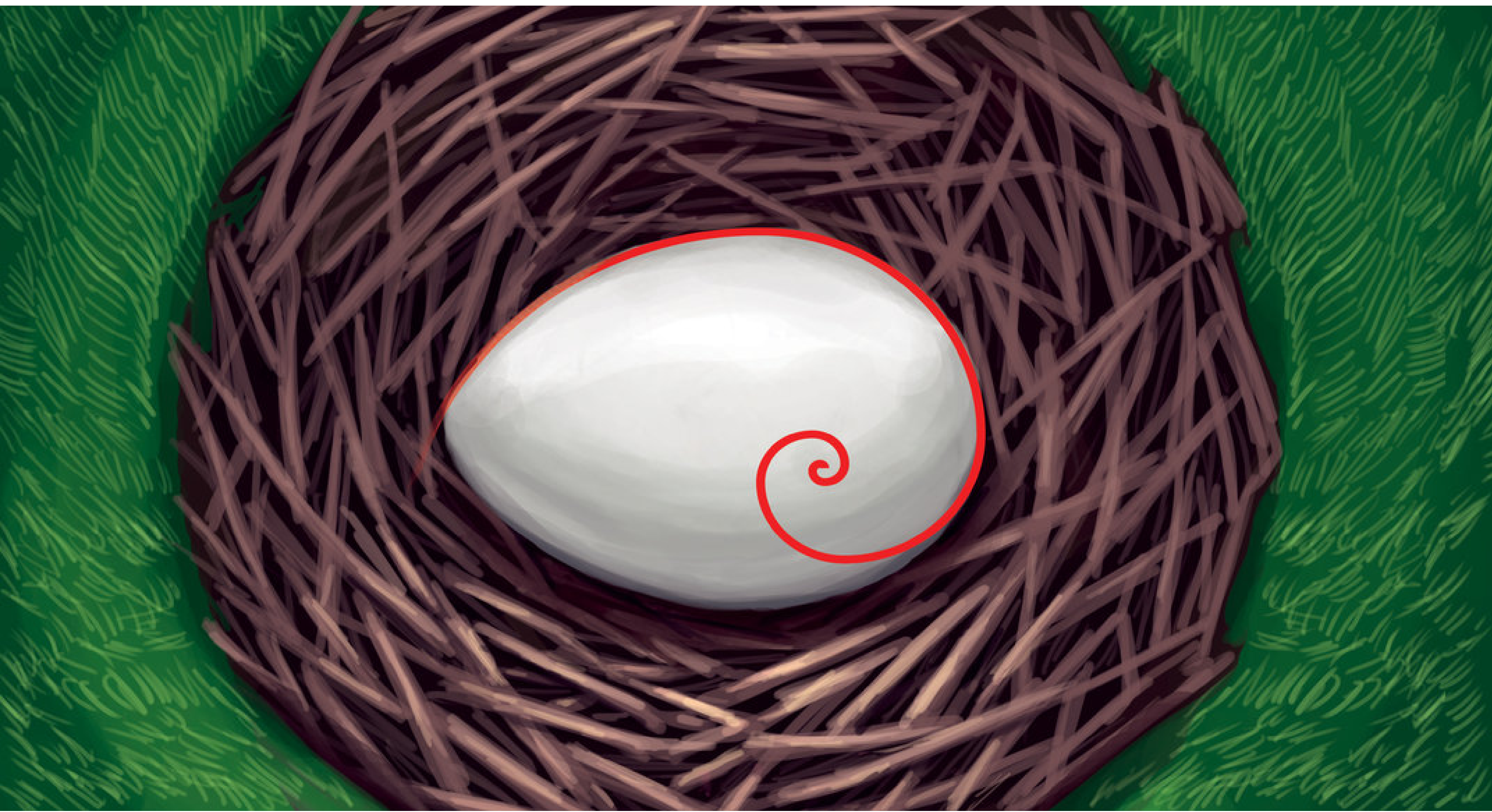
बघितलंत ती रेषा पुढे कशी वाढत जाते ते? आता ही रचना ओळखीची वाटतीय का?



अर्थातच! अहो, वाटतच असणार! आपल्याला ही फिबोनाकी रचना शंखशिंपल्यात दिसते की नाही?



... गोगलगायीच्या शंखातही ती दिसते!



... अगदी अंडयांमध्येसुद्धा ती दिसते! (बघा बरं, अंडयाची चक्राकार रचना घडाळ्याच्या विरुध्द दिशेने आहे मात्र पान १६ वर असलेली रचना घडयाळ्याच्या दिशेने आहे?)!



इतकंच काय चक्रीवादळं व काही आकाशगंगांसारख्या मोठाल्या रचनाही फिबोनाकीच्या हया चक्राकार रचनेचं अनुसरण करताना दिसतात.

आहे की नाही गंमत?

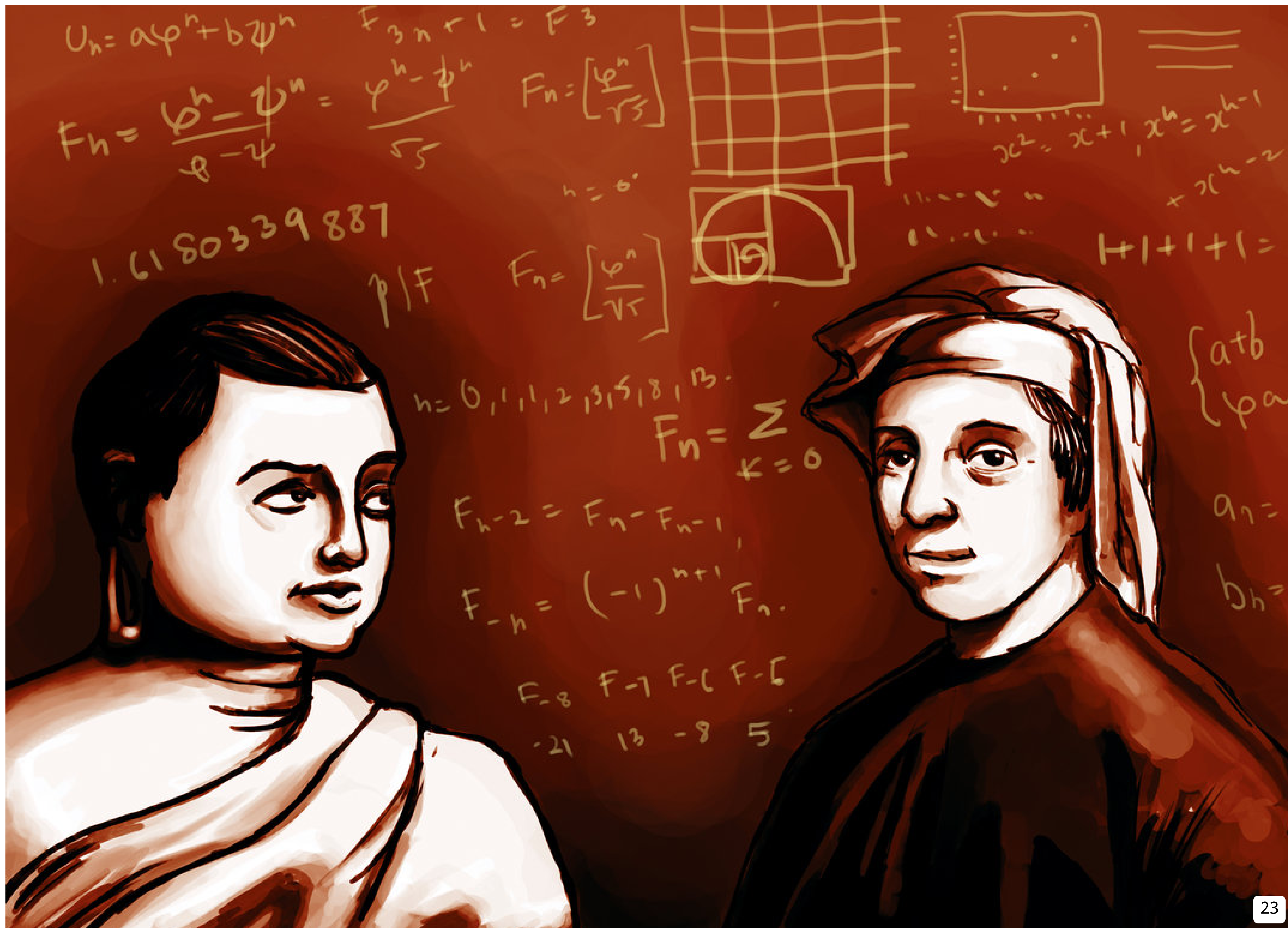
संक्षिप्त इतिहास

फिबोनाकी अंकांच्या या रंजक गोष्टीच्या शेवटाकडे येतांना आपण फिबोनाकी अंक क्रमाच्या इतिहासात डोकावू या.

अकराव्या शतकात (साधारण १००० वर्षांपूर्वी) आता जेथे गुजरात राज्य आहे तेथे हेमचंद्र नावाचा एक जैन विद्वान साधू होऊन गेला. कवनं किंवा रागविस्तार त्रिताल, एकताल, झपताल वगैरे तालांमध्ये बसवतांना एखाद्या स्वराच्या किंवा
ताना - आलापांच्या गाण्याचा वेळ कमी - जास्त करून, किती वेगवेगळ्या संगीतरचना करता येतील ह्याचा शोध घेतांना त्याला ह्या गणिती चमत्काराचा अनुभव आला. तो गणिती अंकांना वेगवेगळ्या पद्धतीने अभ्यासत होता, ज्यामध्ये दीर्घ आणि छोटा स्वर एकत्र करून वेगळी लयदार रचना तयार करता येईल.

साधारण १०० वर्षांनंतर इटालियन गणितज्ञ लियोनार्डो फिबोनाकीने (११७० - १२५०) तीच गणिती रचना १२०२ साली त्याच्या "लिबर अबाकी" (बुक ऑफ कॅलक्युलेशन्स) मध्ये मांडली. फिबोनाकी भूमध्य समुद्राच्या किना-यावर खूप फिरला. तेथे तो पूर्वेकडच्या अनेक व्यापा-यांना भेटला आणि ते गणित कसे मांडतात ह्याचा सतत शोध घेत राहिला.

ह्या भटकंतीत फिबोनाकीला हेमचंद्रची ही अंकांची रचना सापडली असल्याची दाट शक्यता आहे. परंतु युरोपमधून ही अंकांची रचना मांडणारा तो पहिलाच होता म्हणून ह्या अंकांना जगभरात फिबोनाकीची रचना म्हणून मान्यता मिळाली आहे.



$U_n = a\varphi^n + b\psi^n$
$F_{3n+1} = F_3$
$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$
$F_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right]$
$x^2 = x + 1, x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$
$n = 0$
1.6180339887
$p|F$
$F_n = \left[\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}\right]$
1+1+1+1=
$n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.$
$F_n = \sum_{k=0}$
$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$
$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$
F_{-8} F_{-7} F_{-6} F_{-5}
-21 13 -8 5
$a_n =$
$b_n =$

खबरदारीचा इशारा: खरं तर निसर्गात अशी अनेक उदाहरणे आहेत जी फिबोनाकी रचनेनुसार आहेत. काही फुलं मात्र फिबोनाकीच्या रचनेचा अपवादही आहेत बरं का? जशी क्लोवरची चार पाकळ्यांची फुलं किंवा चार पाकळ्या असलेली इतर फुलं.

फिबोनाकी रचना निसर्गात इतक्यांदा आढळतात की त्याबद्दल आश्चर्य वाटल्यावाचून रहात नाही. निसर्गाला फिबोनाकी अंकक्रम इतका का आवडतो ह्याचं रहस्य अजून तरी शास्त्रज्ञांना कळलेलं नाही.

मोठे झाल्यावर कदाचित ह्याचं उत्तर तुम्ही स्वत:च शोधू शकाल. हो की नाही?



Story Attribution:

This story: सुंदर चमत्कार, फिबोनाची अंकांचा! is translated by Bhagyashree Kenge . The © for this translation lies with Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Based on Original story: 'The Fascinating Fibonaccis', by Shonali Chinniah . © Pratham Books , 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license.

Other Credits:

This book was first published on StoryWeaver, Pratham Books.The development of this book has been supported by Oracle Giving Initiative. This book was created for StoryWeaver, Pratham Books, with the support of Roopa Pai (Guest Editor).

Illustration Attributions:

Cover page: Chamomile flower, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 2: Shapes, patterns and numbers, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 3: Numbers , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 4: Shapes , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 5: Triangles , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 6: Anthurium , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 7: Anthurium , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 8: Flowers , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 9: Crown of thorns , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 10: Daisies , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license.

Illustration Attributions:

Page 11: Colourful squares, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 12: Colourful squares, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 13: Squared grids: 1 squared and 2 squared by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 14: Squared grids: 3, 5, 8 and 13 by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 15: Fibonacci spiral , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 16: Spiral , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 17: Fibonacci sequence grid , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 18: Seashell and starfish on a beach, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 19: Snail , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 20: An egg , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 21: Hurricane and galaxy, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 23: Hemachandra and Leonardo Fibonacci, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license.

सुंदर चमत्कार, फिबोनाची अंकांचा!

(Marathi)

हजारो वर्षांपूर्वी हेमचंद्र नावाच्या भारतीय विद्वानाने वैशिष्टयपूर्ण असा अंकांचा क्रम शोधून काढला. त्यानंतर एका शतकानं, इटालियन गणिती फिबोनाची याचेही त्याकडे लक्ष वेधले गेले व त्याने तो क्रम प्रसिध्द केला. त्या गणिती क्रमांना पुढे फिबोनाकी क्रम असे नाव मिळाले. समजायला अतिशय सोपा असलेला हा गणिती क्रम निसर्गातही आपल्याला फुलांमध्ये, शिंपल्यांमध्ये, अंडयांमध्ये, बियांमध्ये, चांदण्यांमध्ये ... पाहायला मिळतो. ह्या पुस्तकात ह्या क्रमाविषयी आणखीन थोडं जाणून घेऊ यात, चला तर मग ...

या पुस्तकाची वाचन पातळी ४ आहे. आत्मविश्वासाने, ओघवते वाचन करणाऱ्या मुलांसाठी.

